



عملیات ماتریس ها

۱. تعریف ماتریس $m \times n$

ماتریسی که دارای m سطر و n ستون باشد را به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نشان می دهیم. هرگاه در ماتریس ، تعداد سطرها و ستونها با یکدیگر مساوی باشند ماتریس را (مربع) نامیده و دارای قطر اصلی و قطر فرعی به صورت زیر است.

مثلاً در ماتریس مربع 3×3 زیر داریم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

درایه های a_{11} و a_{22} و a_{33} روی قطر اصلی هستند و درایه های a_{13} و a_{22} و a_{31} روی قطر فرعی هستند.

الف) روی قطر اصلی $i = j$ است.

ب) پائین قطر اصلی $i > j$ است.

ج) بالای قطر اصلی $i < j$ است.



عملیات ماتریس ها

مثال:

میوه فروشی وزن (برحسب کیلوگرم) میوه‌هایی را که در روزهای مختلف هفته جهت فروش عرضه کرده، به صورت زیر دسته‌بندی کرده است.

	سیب	پرتقال
شنبه	۲۴۰	۴۸۰
دوشنبه	۱۸۰	۳۲۰
چهارشنبه	۳۰۰	۵۶۰
جمعه	۱۷۰	۲۰۰

	سیب	پرتقال
یکشنبه	۸۰	۲۲۵
سه‌شنبه	۱۱۰	۲۵۰
پنجشنبه	۱۰۵	۲۲۵

اطلاعات فوق را می‌توان به صورت آرایشی از اعداد نشان داد.

$$\begin{bmatrix} 480 & 240 \\ 320 & 180 \\ 560 & 300 \\ 200 & 170 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 225 & 80 \\ 250 & 110 \\ 225 & 105 \end{bmatrix}$$

آرایش فوق از اعداد را یک ماتریس و هریک از اعداد را درایه‌ی ماتریس می‌نامند.

مثال:

سطر اول	۲	۵	۷
سطر دوم	۱۱	-۱	۶
سطر سوم	۰	۴	۱
	ستون اول	ستون دوم	ستون سوم

ماتریس مقابل ماتریسی با سه سطر و سه ستون است.

درایه‌ی ۴ در سطر سوم و ستون دوم واقع است.

مثال:

مثالی از یک ماتریس با مرتبه‌ی 3×2 به صورت زیر است که در آن عدد ۷ درایه‌ای است که در سطر دوم و ستون اول واقع شده است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

سه ستون

دو سطر



عملیات ماتریس ها

مثال:

جای هر یک از درایه های ماتریس بالا را مشخص کنید.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \text{ستون اول} \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \text{ستون دوم} \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \text{ستون سوم} \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{سطر اول} \\ \rightarrow \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 5 & -2 \end{array} \right] & & \\ \begin{array}{c} \text{سطر دوم} \\ \rightarrow \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 7 & 4 & 3 \end{array} \right] & & \end{array}$$

ستون اول، سطر اول: $a_{11} = 1$

ستون اول، سطر دوم: $a_{21} = 7$

ستون دوم، سطر اول: $a_{12} = 5$

ستون دوم، سطر دوم: $a_{22} = 4$

ستون سوم، سطر اول: $a_{13} = -2$

ستون سوم، سطر دوم: $a_{23} = 3$

مثال:

در جدول های زیر موجودی حساب جاری پس انداز حسن و احمد در بانک ملی و بانک کشاورزی داده شده است.

موجودی حسن			موجودی احمد		
	جاری	پس انداز		جاری	پس انداز
ملی	۷۰۰۰۰	۸۰۰۰۰	ملی	۶۰۰۰۰	۵۰۰۰۰
کشاورزی	۱۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰	کشاورزی	۴۰۰۰۰	۹۰۰۰۰

موجودی حسن و احمد را در ماتریس هایی به صورت زیر می توان نشان داد :

$$\begin{bmatrix} 70000 & 80000 \\ 100000 & 90000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 60000 & 50000 \\ 40000 & 90000 \end{bmatrix}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

در هر یک از ماتریس‌های داده شده، سطرها در ستون‌ها را مانند نمونه‌ی زیر مشخص کنید و مرتبه‌ی ماتریس را بنویسید.

در هر یک از ماتریس‌های فوق درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون اول را مشخص کنید.

$$A_{2,3} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \\ \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \end{array} \end{array}$$

$$B_{2,2} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{ستون اول} \\ \downarrow \\ 3 \\ -2 \end{array} & \begin{array}{c} \text{ستون دوم} \\ \downarrow \\ 5 \\ 0 \end{array} \\ \left. \begin{array}{c} \leftarrow \text{سطر اول} \\ \leftarrow \text{سطر دوم} \end{array} \right\} & ; \quad a_{11} = 3 \end{array}$$

$$C_{2,3} = \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{ستون اول} \\ \downarrow \\ -5 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{ستون دوم} \\ \downarrow \\ -3 \\ 5 \end{array} & \begin{array}{c} \text{ستون سوم} \\ \downarrow \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \left. \begin{array}{c} \leftarrow \text{سطر اول} \\ \leftarrow \text{سطر دوم} \end{array} \right\} & ; \quad a_{11} = 5 \end{array}$$

$$D_{3,2} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{ستون اول} \\ \downarrow \\ 4 \\ -1 \\ -5 \end{array} & \begin{array}{c} \text{ستون دوم} \\ \downarrow \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{array} \\ \left. \begin{array}{c} \leftarrow \text{سطر اول} \\ \leftarrow \text{سطر دوم} \\ \leftarrow \text{سطر سوم} \end{array} \right\} & ; \quad a_{11} = 4 \end{array}$$



عملیات ماتریس ها

$$H_{3 \times 3} = \begin{array}{ccc|l} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \leftarrow \text{سطر اول} & & \\ & \leftarrow \text{سطر دوم} & & \\ & \leftarrow \text{سطر سوم} & & \end{array} ; a_{11} = 1$$

$$V_{3 \times 1} = \begin{array}{c|l} \text{ستون اول} & \\ \downarrow & \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} & \leftarrow \text{سطر اول} \\ & \leftarrow \text{سطر دوم} \\ & \leftarrow \text{سطر سوم} \end{array} ; a_{11} = 2$$

$$Z_{1 \times 2} = \begin{array}{cc|l} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} & \leftarrow \text{سطر اول} & \end{array} ; a_{11} = -1$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ هر یک از درایه های $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ را مشخص کنید.

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ داریم:

$$a_{11} = -2$$

$$a_{21} = 4$$

$$a_{31} = 5$$

$$a_{12} = 1$$

$$a_{22} = -1$$

$$a_{32} = 0$$



عملیات ماتریس ها

2. جمع و تفریق دو ماتریس

برای جمع و تفریق دو ماتریس :

الف) دو ماتریس باید هم مرتبه باشند.

ب) عضوهای ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع و یا از هم کم می کنیم.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 11 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 11 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 11-2 & 6-0 \\ 4-2 & 3-3 & -1+1 \\ 5-3 & 9-1 & 7-6 \end{bmatrix}$$



عملیات ماتریس ها

قرینه یک ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است، قرینه A ماتریسی است از همان مرتبه که با نماد $-A$ نشان می دهند.

$$\text{if } A = [a_{ij}] \Rightarrow -A = [-a_{ij}]_{m \times n}$$

مثال:

اگر $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ باشد، قرینه ی ماتریس A عبارت است از :

$$(-1)A_{2 \times 2} = (-1) \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \times 5 & -1 \times 6 \\ -1 \times 2 & -1 \times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$$

مثال:

قرینه ی ماتریس های داده شده را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} +1 & -3 \\ -1 & +2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow -B = \begin{bmatrix} +1 & -2 \\ +1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow -C = \begin{bmatrix} -2 & +1 & -1 \\ -3 & -4 & +1 \end{bmatrix}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

فرمندی هر یک از ماتریس های زیر را به دست آورید و سپس مجموع هر ماتریس با قرینه اش را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = [4 \ 2 \ 8] \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -7 & +1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \\ A + (-A) = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+(-7) & -1+1 \\ 2+(-2) & 6+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow -B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ +2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \\ B + (-B) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 4+(-4) & 2+(-2) \\ -2+2 & 1+(-1) & 3+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow -C = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \\ C + (-C) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-2) & 2+(-2) \\ 1+(-1) & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = [4 \ 2 \ 8] \Rightarrow -D = [-4 \ -2 \ -8] \\ D + (-D) = [4 \ 2 \ 8] + [-4 \ -2 \ -8] = [4+(-4) \ 2+(-2) \ 8+(-8)] = [0 \ 0 \ 0] \end{cases}$$



عملیات ماتریس ها

$$\left\{ \begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 5 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow -H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -5 \\ +\frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ H + (-H) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 5 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -5 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) \\ 5 + (-5) \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

مثال:

به مثال میوه فروش باز می گردیم. مصرف میوه برحسب کیلوگرم در دو هفته متوالی و در روزهای شنبه و سه شنبه خانواده ای به صورت جدول های زیر است.

	پرتقال	سیب
شنبه	۸	۵
سه شنبه	۷	۴

هفته ی اول

	پرتقال	سیب
شنبه	۵	۴
سه شنبه	۳	۶

هفته ی دوم

که می توان آن ها را به شکل ماتریس نوشت.

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{مصرف هفته ی اول} \quad B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{مصرف هفته ی دوم}$$

میزان مصرف میوه ی این خانواده در دو هفته مجموعاً عبارت خواهد بود از جمع دو ماتریس A و B :

$$A+B = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+5 & 5+4 \\ 7+3 & 4+6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{شنبه} \\ \text{سه شنبه} \end{array}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

معادله‌های ماتریسی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) مرتبه‌ی ماتریس‌های A و B را مشخص کنید.

مرتبه‌ی ماتریس‌های A و B را در زیر مشخص می‌کنیم:

$$\text{اگر } \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{2 \times 2}$$

$$\text{اگر } B + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_{2 \times 3}$$

$$\text{اگر } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_{2 \times 3}$$



عملیات ماتریس ها

ب) درایه های ماتریس های A و B را معلوم کنید.

درایه های ماتریس های A و B را در معادله های ماتریسی زیر، پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A &= \begin{bmatrix} 0-5 & 0-8 \\ 0-8 & 0-5 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A &= \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -8 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow B &= \begin{bmatrix} 0-2 & 0-(-1) & 0-9 \\ 0-7 & 0-0 & 0-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow B &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -9 \\ -7 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow B &= \begin{bmatrix} 0-1 & 0-2 & 0-(-1) \\ 0-3 & 0-(-1) & 0-1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow B &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$A+B$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 5+1 \\ 0+2 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$B+C$

$$B+C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 1+(-1) \\ 2+2 & 5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$C+A$

$$C+A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -1+5 \\ 2+0 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

ج) آیا رابطه ی $A+B=B+A$ برقرار است؟

به بررسی رابطه ی $A+B=B+A$ می پردازیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 5+1 \\ 0+2 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \\ B+A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 1+5 \\ 2+0 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \right\} A+B=B+A$$



عملیات ماتریس ها

آیا رابطه ی $(A+B)+C = A+(B+C)$ برقرار است؟

به بررسی رابطه ی $(A+B)+C = A+(B+C)$ می پردازیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \\ A+(B+C) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \end{array} \right\} (A+B)+C = A+(B+C)$$

آیا این رابطه ها برای هر سه ماتریس $A_{m \times n}$ ، $B_{m \times n}$ ، $C_{m \times n}$ برقرار است؟ مثال بزنید.

این رابطه برای هر سه ماتریس $A_{m \times n}$ ، $B_{m \times n}$ ، $C_{m \times n}$ برقرار است. برای مثال داریم:

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & -1 \\ 5 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 6 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 6 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

نتیجه می گیریم که:

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

اگر $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $Q = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 4 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس R را طوری بیابید که $P+Q+R=0$

$$\text{فرض } P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } Q = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 4 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$$

$R = ?$ (حکم)

$$P+Q+R=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 4 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} + R = 0$$

$$\Rightarrow R = - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 4 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & +1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ +6 & -4 \\ -2 & +9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} -3+(-5) & -2+(-7) \\ -5+6 & 1+(-4) \\ -4+(-2) & 0+9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 1 & -3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$



عملیات ماتریس ها

3 ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

برای ضرب عدد حقیقی k در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باید k را در تمام عضوهای ماتریس ضرب کرد.

$$kA = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

به حالت زیر توجه فرمائید!

$k \in \mathbb{R}$ دو ماتریس هم مرتبه هستند و A, B

$$I) \quad k(A+B) = kA + kB$$

اثبات

فرض: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

حکم: $k(A+B) = kA + kB$

$$\begin{aligned} k(A+B) &= k([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}) \\ &= k[a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \\ &= [ka_{ij} + kb_{ij}]_{m \times n} \\ &= [ka_{ij}]_{m \times n} + [kb_{ij}]_{m \times n} \\ &= k[a_{ij}]_{m \times n} + k[b_{ij}]_{m \times n} \\ &= kA + kB \end{aligned}$$

$$II) \quad k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$$

$$III) \quad k_1A + k_2A = (k_1 + k_2)A$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

ماتریس $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس $5A$ و $-3A$ را مشخص کنید.

$$\text{فرض } A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$5A$ و $-3A$ (حکم)

$$-3A = (-3) \times \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times (-3) & -3 \times (-3) & 2 \times (-3) \\ 2 \times (-3) & 4 \times (-3) & 5 \times (-3) \\ 5 \times (-3) & 9 \times (-3) & 1 \times (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -6 \\ -6 & -12 & -15 \\ -15 & -27 & -3 \end{bmatrix}$$

$$5A = (5) \times \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 & -3 \times 5 & 2 \times 5 \\ 2 \times 5 & 4 \times 5 & 5 \times 5 \\ 5 \times 5 & 9 \times 5 & 1 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 10 & 20 & 25 \\ 25 & 45 & 5 \end{bmatrix}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

عبارات زیر را محاسبه کنید.

$2A$

$$2A = 2 \times \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 5 \times 2 \\ 0 \times 2 & 1 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$3C$

$$3C = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 3 & -1 \times 3 \\ 2 \times 3 & 5 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$2A+B$

$$2A+B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 10+1 \\ 0+2 & 2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال:

ماتریس $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ و $k=2$ را در نظر بگیرید. ماتریس kA عبارت است از:

$$k \times A_{2 \times 3} = 2 \times \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 & 2 \times 0 & 2 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times 4 & 2 \times (-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -14 \end{bmatrix}$$



عملیات ماتریس ها

❖ مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد $3A - 2B$ را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} 3A - 2B &= 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

❖ مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه $2A + 3B$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} 2A + 3B &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

معادلات زیر را با توجه به محاسبات در ماتریس های مربعی مرتبه ی 2×2 حل کنید.

$$\text{الف) } X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow X &= \begin{bmatrix} 2-0 & 0-1 \\ 0-1 & 2-0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow X &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 2X &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow 2X &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow X &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow X &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

2-4) خواص ضرب ماتریس ها

خاصیت 1

$$A(B+C) = AB + AC$$

اثبات

$$\text{فرض : } A = [a_{ik}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times p}, C = [c_{ij}]_{n \times p}$$

$$\text{حکم : } A(B+C) = AB + AC$$

$$\begin{aligned} A(B+C) &= [a_{ik}]_{m \times n} \left([b_{ij}]_{n \times p} + [c_{ij}]_{n \times p} \right) \\ &= [a_{ik}]_{m \times n} [b_{ij} + c_{ij}]_{n \times p} \\ &= \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \right]_{m \times p} \\ &= \left[\sum_{k=1}^n (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}) \right]_{m \times p} \\ &= \left[\sum_{k=1}^n (a_{ik} b_{kj}) \right] + \left[\sum_{k=1}^n (a_{ik} c_{kj}) \right] \\ &= AB + AC \end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

اثبات

$$\text{فرض : } A = [a_{ik}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times p}$$

$$\text{حکم : } \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$\begin{aligned} \lambda(AB) &= \lambda \left([a_{ik}]_{m \times n} [b_{ij}]_{n \times p} \right) \\ &= \lambda \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\lambda a_{ik}) b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{ik}) (\lambda b_{kj}) \\ &= A(\lambda B) \end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

$$A(BC) = (AB)C$$

اثبات

$$\text{فرض : } A = [a_{ik}]_{m \times p}, B = [b_{kr}]_{p \times q}, C = [c_{rj}]_{q \times l}$$

$$\text{حکم : } A(BC) = (AB)C$$

$$\begin{aligned} A(BC) &= [a_{ik}]_{m \times p} \left([b_{kr}]_{p \times q} [c_{rj}]_{q \times l} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p a_{ik} \sum_{r=1}^q b_{kr} c_{rj} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{r=1}^q a_{ik} (b_{kr} c_{rj}) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{r=1}^q (a_{ik} b_{kr}) c_{rj} \\ &= \sum_{r=1}^q \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kr} \right) c_{rj} \\ &= \sum_{r=1}^q ((AB)_i)_r c_{rj} \\ &= (AB)C \end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

اگر A و B و C و D ماتریسهایی باشند عبارات زیر را ثابت کنید.

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

با توجه به خاصیت پخش از چپ داریم:

$$\begin{aligned}(A+B)(C+D) &= (A+B)C + (A+B)D \\ &= AC + BC + AD + BD\end{aligned}$$

$$(A-B)(C-D) = AC - AD - BC + BD$$

$$\begin{aligned}(A-B)(C-D) &= (A+(-B))(C+(-D)) \\ &= AC + A(-D) + (-B)C + (-B)(-D) \\ &= AC - AD - BC + BD\end{aligned}$$

مثال:

اگر A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند، در اینصورت $(A+B)(A-B)$ کدام است؟

$$AB - BA \quad (2) \qquad A^2 - B^2 \quad (1)$$

$$A^2 - B^2 - AB + BA \quad (4) \qquad B^2 - A^2 \quad (3)$$

گزینه (4) صحیح است.

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) &= (A+B)(A+(-B)) \\ &= A^2 + A(-B) + BA + B(-B) \\ &= A^2 - B^2 - AB + BA\end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

اگر k یک عدد حقیقی ناصفر و A و B دو ماتریس $m \times n$ دلخواه باشند، ثابت کنید:

$$k A = k B \Rightarrow A = B$$

چون $k \neq 0$ است پس عدد $\frac{1}{k}$ موجود است.

$$\begin{aligned} \text{if } k A = k B &\Rightarrow \frac{1}{k}(k A) = \frac{1}{k}(k B) \\ &\Rightarrow A = B \end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

خاصیت 2

ضرب ماتریسها در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد

مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A \times B$, $B \times A$ را محاسبه کنید.

نشان دهید: $A \times B \neq B \times A$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(2) + (1)(1) & (-1)(-1) + (1)(0) \\ (0)(2) + (1)(1) & (0)(-1) + (1)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-1) + (-1)(0) & (2)(1) + (-1)(1) \\ (1)(-1) + (0)(0) & (1)(1) + (0)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad A \times B \neq B \times A$$

تکته: در حالات زیر، ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی دارد

الف) دو ماتریس قطری و هم مرتبه باشند.

ب) یکی از ماتریسها عامل ضرب اسکالریا واحد داشته باشد.

ج) در ماتریسهای مرتبه دوم هرگاه هر دو ماتریس عامل ضرب، دارای عضوهای مساوی روی قطر اصلی باشند و دارای عضوهای

قرینه یا مساوی روی قطر فرعی باشند، نسبت به ضرب خاصیت جابجایی دارند.

$$\begin{bmatrix} m & n \\ n & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -n \\ n & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -n \\ n & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & n \\ n & m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$



عملیات ماتریس ها

خاصیت 3

هرگاه ضرب دو ماتریس برابر صفر باشند، نمی توان نتیجه گرفت که حداقل یکی از ماتریسهای عامل ضرب برابر صفر است

$$(if \ AB = \bar{O} \not\Rightarrow A = \bar{O} \quad B \neq \bar{O})$$

به عنوان مثال داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خاصیت 4

در حالت کلی قانون حذف، در ضرب ماتریسها برقرار نمی باشد، اگر $AB = AC$, $A \neq 0$ نمی توان نتیجه گرفت که $B = C$

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = AC \\ A \neq 0 \end{array} \right\} B \neq C$$

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ نگاه داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix} \\ AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} AB = AC \\ B \neq C \end{array}$$



عملیات ماتریس ها

خاصیت 5

توانهای طبیعی یک ماتریس مربع

فرض کنید A یک ماتریس مربع است ، در این صورت توانهای طبیعی A به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A^1 = A , A^2 = AA , A^3 = A^2 A , \dots , A^{n+1} = A^n A$$

در صورتی که A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد آنگاه:

$$A^0 = I_n$$

I_n ماتریس واحد مرتبه n است.

مثال:

نشان دهید $AA^2 = A^2A$

$$\begin{aligned} AA^2 &= A(AA) \\ &= (AA)A \\ &= A^2A \end{aligned}$$

مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد در این صورت A^2 را به دست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & ac \end{bmatrix}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

اگر $A^2 = 3A$ باشد، در این صورت A^{100} کدام است؟

$$3^{99} A^{99} \quad (4)$$

$$3^{99} A \quad (3)$$

$$3^{100} A^{99} \quad (2)$$

$$3^{100} I \quad (1)$$

گزینه (3) صحیح است.

$$A^3 = A^2 A = (3A) A = 3A^2 = 3(3A) = 3^2 A$$

$$A^4 = A^3 A = (3^2 A) A = 3^2 (A^2) = 3^2 (3A) = 3^3 A$$

$\vdots$

$$A^{100} = 3^{99} A$$

مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت درایه سطر دوم، ستون اول ماتریس A^3 کدام است؟

$$A^3 = A^2 A$$

سطر دوم ماتریس A^2 را محاسبه می کنیم:

$$A^2 \text{ سطر دوم} = (\text{سطر دوم ماتریس } A) \cdot A = [1 \quad -2 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = [-2 \quad 4 \quad 0]$$

باید سطر دوم A^2 را در ستون اول ماتریس A ضرب کرد:

$$A^3 \text{ ستون اول} = (\text{سطر دوم } A^2) \cdot (\text{ستون اول } A) = [-2 \quad 4 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

اگر $AB + BA = \bar{O}$ در این صورت کدام گزینه درست است؟

$$A^2B = BA^2 \quad (3)$$

$$A^2B = -BA \quad (1)$$

$$AB = A^2B \quad (4)$$

$$A^2B = -BA^2 \quad (2)$$

گزینه (3) صحیح است.

$$\text{if } AB + BA = \bar{O} \Rightarrow AB = -BA$$

$$\begin{aligned} A^2B &= (AA)B \\ &= A(AB) \quad ; \quad AB = -BA \\ &= A(-BA) \\ &= -(AB)A \\ &= -(-BA)A \\ &= BA^2 \end{aligned}$$

مثال:

اگر A یک ماتریس مربع باشد آنگاه $AA^n = A^nA$ است.

اثبات به روش استقراء:

$$p(1): n=1 \Rightarrow AA^1 = A^1A \quad \text{برقرار}$$

$$\text{فرض استقراء: } p(k): n=k \Rightarrow AA^k = A^kA$$

$$\text{حکم استقراء: } p(k+1): n=k+1 \Rightarrow AA^{k+1} = A^{k+1}A$$

$$\begin{aligned} AA^{k+1} &= A(AA^k) \quad ; \quad AA^k = A^kA \\ &= A(A^kA) \\ &= (AA^k)A \\ &= A^{k+1}A \end{aligned}$$

توجه شود که در حالت کلی $A^m A^n = A^n A^m$



عملیات ماتریس ها

❖ مثال:

اگر $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، چند ماتریس X وجود دارد به طوری که $X^2 = B$ باشد.

فرض کنیم $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد.

$$\begin{aligned} X^2 = B &\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ bc + d^2 = 0 \\ ab + bd = 0 \Rightarrow b(a + d) = 0 \Rightarrow b = 0, a + d = 0 \\ ac + cd = 1 \Rightarrow c(a + d) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

امکان ندارد $a + d = 0, c(a + d) = 1$

هیچ ماتریس X وجود ندارد.



عملیات ماتریس ها

خاصیت 6 (ضرب درونی یا داخلی)

اگر $R = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ \dots \ r_n]_{1 \times n}$ یک ماتریس سطر (ROW) و $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$ یک ماتریس ستونی (column) باشد، ضرب

داخلی (درونی) RC به صورتی مشابه با آنچه که قبلاً در بردارها بیان شده به صورت زیر تعریف می شود.

$$RC = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ \dots \ r_n]_{1 \times n} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = r_1 c_1 + r_2 c_2 + \dots + r_n c_n = \sum_{i=1}^n r_i c_i$$

توجه داشته باشید که ضرب درونی فقط وقتی تعریف می شود که R شامل یک سطر و C فقط شامل یک ستون باشد و ضرب درونی آنها یک عدد است.

مثلاً :

$$[4 \ 2 \ 0]_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = (4 \times 2) + (2 \times 3) + (0 \times (-1)) = 14 = [14]_{1 \times 1}$$



عملیات ماتریس ها

4. ضرب دو ماتریس

1-4) تعریف ضرب دو ماتریس

ماتریسهای A و B موجود هستند، $C = A \times B$ وقتی وجود دارد که تعداد ستونهای ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند.

اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ دو ماتریس مفروض باشند، داریم:

$$C = A \times B$$

$$[c_{ij}]_{m \times p} = [a_{ij}]_{m \times n} \times [b_{ij}]_{n \times p} \Rightarrow [c_{ij}]_{m \times p} = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right]_{m \times p}$$

$$C_{ij} = A \times B \text{ ستون } j \text{ ام ماتریس } B \times \text{ سطر } i \text{ ام ماتریس } A = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{mj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = a_{1j}b_{1j} + a_{2j}b_{2j} + \dots + a_{mj}b_{mj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

بنابراین اگر $A_{m \times n}$ و $B_{n \times p}$ دو ماتریس باشند آنگاه AB تعریف می شود و اگر هدف یافتن سطر و ستون خاصی از ماتریس AB باشد چنین داریم:

$$[\text{ستون } j \text{ ام ماتریس } B] \times A = \text{ستون } j \text{ ام ماتریس } AB$$

$$B \times [\text{سطر } i \text{ ام ماتریس } A] = \text{سطر } i \text{ ام ماتریس } AB$$

$$[\text{ستون } j \text{ ام } B] \times [\text{سطر } i \text{ ام } A] = \text{ستون } j \text{ ام } i \text{ ام ماتریس } AB$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

دو ماتریس $D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ و ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

۱- مرتبه‌ی ماتریس‌های فوق را بنویسید.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} ; D_{2 \times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} ; A_{2 \times 2}$$

۲- حاصل ضرب دو ماتریس را بدست آورید.

$$A_{2 \times 2} \times D_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} A_{2 \times 2} \times D_{2 \times 3} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [2 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & [2 \ 1] \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} & [2 \ 1] \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \\ [5 \ 9] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & [5 \ 9] \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} & [5 \ 9] \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \\ &= \begin{bmatrix} (2)(3)+(1)(2) & (2)(7)+(1)(1) & (2)(4)+(1)(6) \\ (5)(3)+(9)(2) & (5)(7)+(9)(1) & (5)(4)+(9)(6) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 15 & 14 \\ 33 & 44 & 74 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۳- آیا حاصل ضرب $D_{2 \times 3} \times A_{2 \times 2}$ انجام پذیر است؟ چرا؟

حاصل ضرب $D_{2 \times 3} \times A_{2 \times 2}$ انجام پذیر نیست، زیرا تعداد ستون‌های D با تعداد سطرهای A برابر نیستند.
یادآوری) حاصل ضرب دو ماتریس در صورتی امکان پذیر است که تعداد ستون‌های اولی با تعداد سطرهای دومی برابر باشند.



عملیات ماتریس ها

❖ مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشند، $A \times B$ ، $C \times B$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} [3 \ -2] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [1 \ 0] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} (3)(3) + (-2)(1) \\ (1)(3) + (0)(1) \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \times B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} [2 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [-1 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [0 \ -1] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} (2)(3) + (1)(1) \\ (-1)(3) + (2)(1) \\ (0)(3) + (-1)(1) \end{bmatrix}_{3 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

دو ماتریس A, B به صورت زیر بیان شده اند حاصلضرب AB را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. حاصل ضرب $A \times B$, $B \times A$ را به دست آورید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)\left(\frac{5}{2}\right) + (1)(-4) & (2)\left(-\frac{1}{2}\right) + (1)(1) \\ (8)\left(\frac{5}{2}\right) + (5)(-4) & (8)\left(-\frac{1}{2}\right) + (5)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



عملیات ماتریس ها

$$\begin{aligned}
 B \times A &= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \left[\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} & \left[\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \left(\frac{5}{2}\right)(2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(8) & \left(\frac{5}{2}\right)(1) + \left(-\frac{1}{2}\right)(5) \\ (-4)(2) + (1)(8) & (-4)(1) + (1)(5) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

مثال:

اگر $A = [-1, 2, 3]$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ در این صورت BA را به دست آورید.

$$BA = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1} [-1, 2, 3]_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & -10 & -15 \\ -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$



عملیات ماتریس ها

❖ مثال:

حاصل ضرب $[5 \ 0 \ 1 \ 0]_{1 \times 4}$ را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{4 \times 1} [5 \ 0 \ 1 \ 0]_{1 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

❖ مثال:

جوابهای معادله $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ چقدر است؟

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x \\ 2x+3 \end{bmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

مجموع ریشه های معادله $= 0$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} [x, 4, -1]_{1 \times 3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} &= 0 \Rightarrow [2x+4, x-2, 4] \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow [(2x+4)x] + [(x-2)4] - 4 = 0 \\ &\Rightarrow 2x^2 + 4x + 4x - 8 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow 2x^2 + 8x - 12 = 0 \quad ; \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ &\Rightarrow x_1 + x_2 = -4 \end{aligned}$$

مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ درایه سطر دوم و ستون سوم AB را پیدا کنید.

فرض کنیم هر درایه ماتریس AB به صورت C_{ij} باشد:

$$C_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

بنابراین اگر $A_{m \times p}$ و $B_{p \times n}$ دو ماتریس باشند آنگاه AB تعریف می شود و اگر هدف یافتن سطر و ستون خاصی از ماتریس AB باشد چنین داریم:

$$[\text{ستون } j \text{ ام } B] \times [\text{سطر } i \text{ ام } A] = \text{سطر } i \text{ ام و ستون } j \text{ ام } AB$$



عملیات ماتریس ها

❖ مثال:

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ باشد:}$$

ستون دوم ماتریس AB کدام است؟

سطر دوم ماتریس AB کدام است؟

برای محاسبه ستون دوم AB باید، به ترتیب تمام سطرهای A در ستون دوم B ضرب شوند و درایه های آن به ترتیب از بالا به پایین به دست می آیند. این بدان معناست که ماتریس A را در ستون دوم ماتریس B ضرب می کنیم.

$$\text{ستون دوم ماتریس } AB = A \times (\text{ستون دوم } B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه سطر دوم ماتریس AB ، سطر دوم ماتریس A را به ترتیب در ستون های B ضرب می کنیم.

$$\text{سطر دوم ماتریس } AB = (\text{سطر دوم } A) \times B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 24 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر $A_{m \times p}$ و $B_{p \times n}$ دو ماتریس باشند آنگاه AB تعریف می شود و اگر هدف یافتن سطر و ستون خاصی از ماتریس AB باشد چنین داریم:

$$[\text{ستون } j \text{ ام ماتریس } B] \times A = \text{ستون } j \text{ ام ماتریس } AB$$

$$A \times [\text{سطر } i \text{ ام ماتریس } A] = [\text{سطر } i \text{ ام ماتریس } AB]$$

$$[\text{ستون } j \text{ ام } B] \times [\text{سطر } i \text{ ام } A] = [\text{سطر } i \text{ ام و ستون } j \text{ ام } AB]$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، دومین ستون ماتریس AB کدام است؟

$$AB \text{ دومین ستون ماتریس} = A \times (B \text{ دومین ستون}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، درایه سطر اول و ستون دوم AB را بدست آورید.

$$AB \text{ سطر اول و ستون دوم ماتریس} = (A \text{ سطر اول}) \times (B \text{ ستون دوم}) = [1 \ 2 \ 1] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 6$$

مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد؛

ستون اول ماتریس AB کدام است؟

سطر اول ماتریس کدام است؟

$$AB \text{ ستون اول ماتریس} = A \times [B \text{ ستون اول}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$AB \text{ سطر اول ماتریس} = (A \text{ سطر اول}) \times B = [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [7 \ 6 \ 8]$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

درایه سطر دوم، ستون سوم $A(B+C)$ کدام است؟

[ستون سوم ماتریس $(B+C)$ $\times$ (سطر دوم ماتریس A) = درایه سطر دوم، ستون سوم ماتریس $A(B+C)$]

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} + c_{13} \\ b_{23} + c_{23} \\ \vdots \\ b_{n3} + c_{n3} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{2k} (b_{k3} + c_{k3})$$

مثال:

فرض کنید $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times p}$ و $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ باشد. در این صورت مولفه سطر سوم، ستون چهارم ماتریس $(AB)C$ کدام است؟

$$\text{if } AB = D \Rightarrow (AB)C = D_{m \times p} \cdot C_{p \times q}$$

ستون چهارم $\times C$ سطر سوم $= D$ مولفه سطر سوم، ستون چهارم DC

$$\begin{bmatrix} D_{31} & D_{32} & \dots & D_{3L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{14} \\ c_{24} \\ \vdots \\ c_{L4} \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^p d_{3L} \cdot c_{L4} = \sum_{L=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{3k} b_{kL} \right) c_{L4}$$

مثال:

فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{10 \times 8}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times 6}$ و $C = [c_{ij}]_{n \times 3}$ اگر ABC تعریف شده باشد $m+n$ چقدر است؟

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 10 \times 8 & m \times 6 & n \times 3 \Rightarrow m+n = 8+6 = 14 \\ m=8 & n=6 & \end{array}$$



عملیات ماتریس ها

5. ماتریس های تعویض پذیر

اگر A و B دو ماتریس باشند، به طوری که $AB = BA$ آنگاه گوییم A و B تعویض پذیرند. در این حالت لازم است هر دو ماتریس مربع و هم مرتبه باشند.
اکثر اتحادهای جبری در مورد هر دو ماتریس تعویض پذیر برقرار می باشند:

$$(A+B)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \dots + \binom{n}{n} B^n$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

مثال:

آیا دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ تعویض پذیرند.

اگر $AB = BA$ باشد، آنگاه A و B تعویض پذیر هستند:

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -23 \\ 23 & -7 \end{bmatrix} \\ BA = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -23 \\ 23 & -7 \end{bmatrix} \end{array} \right\} AB = BA$$

A و B تعویض پذیرند.



عملیات ماتریس ها

مثال:

الف) نشان دهید اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد، آنگاه $b = c = 0$

ب) ثابت کنید هر ماتریس 2×2 با ماتریس $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ تعویض پذیر است.

الف)

$$\begin{aligned} AB = BA &\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow b = c = 0 \end{aligned}$$

ب)

اگر $\begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix}$ هر ماتریس دلخواه 2×2 باشد، آنگاه:

$$\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ar & ap \\ aq & as \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \right)$$

مثال:

اگر A و B ماتریسهای تعویض پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

اگر A و B ماتریسهای تعویض پذیر باشند، آنگاه $AB = BA$

$$\begin{aligned} (A+B)^3 &= (A+B)(A+B)(A+B) \\ &= (A^2 + AB + BA + B^2)(A+B) \quad ; \quad AB = BA \\ &= (A^2 + 2AB + B^2)(A+B) \\ &= A^3 + 2A^2B + AB^2 + A^2B + 2AB^2 + B^3 \\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

ثابت کنید اگر $AB = BA$ باشد، آنگاه $A^2 B^3 = B^3 A^2$.

فرض: $AB = BA$

حکم: $A^2 B^3 = B^3 A^2$

$$\begin{aligned}
 A^2 B^3 &= (AA)(BBB) \\
 &= A(AB)(BB) \\
 &= A(BA)(BB) \\
 &= (AB)(AB)B \\
 &= (BA)(BA)B \\
 &= B(AB)(AB) \\
 &= B(BA)(BA) \\
 &= BB(AB)A \\
 &= BB(BA)A \\
 &= (BBB)(AA) \\
 &= B^3 A^2
 \end{aligned}$$

مثال:

اگر A و B دو ماتریس مربع و تعویض پذیر باشند ثابت کنید $(AB)^n = A^n B^n$

اثبات به روش استقرای:

فرض: $AB = BA$ تعویض پذیر

برقرار است $p(1): n=1 \Rightarrow (AB)^1 = A^1 B^1$

فرض استقرای: $p(k): n=k \Rightarrow (AB)^k = A^k B^k$

حکم استقرای: $p(k+1): (AB)^{k+1} = A^{k+1} B^{k+1}$

$$\begin{aligned}
 (AB)^{k+1} &= (AB)^k (AB) ; (AB)^k = A^k B^k \\
 &= (A^k B^k)(BA) \\
 &= (A^k B^{k+1} A) \\
 &= (A^k A B^{k+1}) \\
 &= A^{k+1} B^{k+1}
 \end{aligned}$$



عملیات ماتریس ها

مثال:

فرض کنیم اگر A و B دو ماتریس مربع $n \times n$ باشند، تعویض پذیر باشند، آنگاه ثابت کنید $AB^n = B^n A$

اثبات به روش استقراء:

$AB = BA$ و A : تعویض پذیر

برقرار است $p(1): n=1 \Rightarrow AB^1 = B^1 A$

فرض استقراء: $p(k): n=k \Rightarrow AB^k = B^k A$

حکم استقراء: $p(k+1): n=k+1 \Rightarrow AB^{k+1} = B^{k+1} A$

$$\begin{aligned} AB^{k+1} &= A(B^k \cdot B) \\ &= (AB^k)B \\ &= (B^k A)B \\ &= B^k (AB) \\ &= B^k (BA) \\ &= (B^k B)A \\ &= B^{k+1} A \end{aligned}$$

مثال:

اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ با ماتریس $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد، آنگاه $a+b$ چقدر است؟

$$\begin{aligned} AB = BA &\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a-15 & 2b-35 \\ 5a+6 & 5b+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+5b & -5a+2b \\ 6+35 & -15+14 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 5a+6=41 \Rightarrow 5a=35 \Rightarrow a=7 \\ 5b+14=-1 \Rightarrow 5b=-15 \Rightarrow b=-3 \end{cases} \\ &\Rightarrow a+b = (7) + (-3) \\ &\Rightarrow a+b = 4 \end{aligned}$$